ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17101 для 10 класса

1. Число A делится на 6 и его запись заканчивается цифрой 2. Если же последнюю цифру переставить в начало, то получится число, на 18 большее A. Может ли число A быть 2023-значным? 2024-значным? Если да, найдите пример такого числа; если нет, объясните, почему.

Решение.

Число A можно представить в виде $A = 10x + 2$, где x – некоторое число, составленное из всех цифр числа A кроме последней. После перестановки последней цифры в начало будет получено новое число B, которое запишется как $B = 2 \cdot 10^n + x$ (где $n \in \mathbb{N}$).

Согласно условию, $B = A + 18$, что дает уравнение

$$2 \cdot 10^n + x = 10x + 2 + 18 = 10x + 20,$$

откуда

$$9x = 2 \cdot 10^n - 20 = 20 \cdot (10^{n-1} - 1).$$

Если $n \geq 2$, то

$$9x = 20 \cdot \underbrace{\overline{99\ldots9}}_{n-1} \;\Rightarrow\; x = 20 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{n-1} = \overline{\underbrace{22\ldots2}_{n-1}0} \;\Rightarrow\; A = \overline{\underbrace{22\ldots2}_{n-1}02}$$

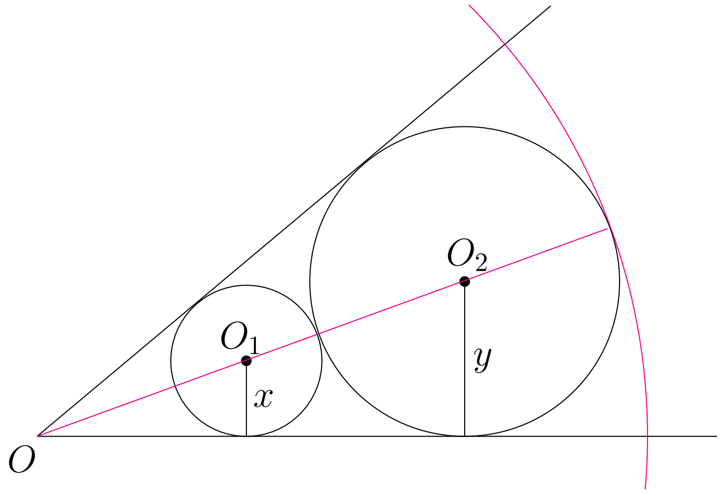
Чтобы полученное четное число было кратно 6-ти, оно должно делиться на 3. Это будет выполнено, если количество двоек в его записи n будет делиться на 3. Это возможно для $n = 2022$, т.е. для 2023-значного числа.

Ответ: а) может: $A = \overline{\underbrace{22\ldots2}_{2021}02}$; б) не может.

2. В круговой сектор радиуса R с центральным углом α вписаны две окружности (обе касаются радиусов-сторон сектора, друг друга внешним образом, а большая касается окружности сектора). Какое наибольшее значение может принимать отношение радиуса меньшей окружности к R и при каком значении α оно достигается?

Решение.

Обозначим радиусы малой и большой вписанных окружностей через x и y, введем величину $\beta = \alpha/2$.



Выразим стороны треугольников через радиусы трех окружностей.

$$OO_2 = R - y, \quad OO_1 = R - x - 2y.$$

Из подобия прямоугольных треугольников получаем

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{R-y}{y} = \frac{R-x-2y}{x}.$$

Из второго равенства

$$\frac{R}{y} = \frac{R-2y}{x} \;\Rightarrow\; x = \frac{R-2y}{R}\cdot y \;\Rightarrow\; \frac{x}{R} = \left(1 - 2\frac{y}{R}\right)\cdot\frac{y}{R}.$$

Относительно величины $t = \dfrac{y}{R}$ отношение $\dfrac{x}{R}$ есть парабола $(1-2t)\cdot t$.

Вершина этой параболы (ее максимальное значение) находится в $t_B = \frac{1}{4}$. Следовательно, $\max\dfrac{x}{R} = \dfrac{1}{8}$.

Для поиска угла остается решить уравнение

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{R}{y} - 1 = \frac{1}{t_B} - 1 = 3.$$

Таким образом, $\alpha = 2\beta = 2\arcsin\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $1/8$ при $\alpha = 2\arcsin\dfrac{1}{3}$.

3. На прямолинейной линии электропередач через каждые m км установлены обслуживающие подстанции. Если занумеровать их подряд вдоль линии, то расстояние от центрального поста до первой подстанции равно $6\sqrt{2}$ км, до третьей – $2\sqrt{34}$ км и до четвертой – $6\sqrt{10}$ км. На каком расстоянии от первой подстанции находится точка на линии, ближайшая к центральному посту? Найдите также расстояние от поста до линии и значение m, если это возможно.

Решение.

Если ввести декартову систему координат с началом координат в точке расположения первой подстанции и одной из осей, направленной вдоль линии (можно и иначе), то координаты всех подстанций будут изменяться линейным образом, следовательно квадраты расстояний до поста будут являться значениями некоторого многочлена второй степени $P(s) = as^2 + bs + c$. Найдем его. Будем измерять s в условных единицах длины, равных m. Тогда

$$\begin{aligned} P(0) &= c = 72, \\ P(2) &= 4a + 2b + c = 136, \\ P(3) &= 9a + 3b + c = 360. \end{aligned}$$

Из полученной линейной системы найдем

$$a = 64, \qquad b = -96, \qquad c = 72.$$

Следовательно, искомый многочлен имеет вид

$$P(s) = 64s^2 - 96s + 72 = (8s - 6)^2 + 36.$$

Видно, что $P(s)$ нигде не обращается в ноль (и всюду положителен). Его минимальное значение равно 36, что соответствует квадрату расстояния от поста до линии.

Этот минимум достигается при $s = s_0 = \frac{3}{4}$, следовательно расстояние d от первой подстанции (начала отсчета) до точки, ближайшей к посту, равно $\frac{3}{4}m$.

Саму величину d несложно найти из прямоугольного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ и катетом 6. Она равна 6. Следовательно, $m = \frac{4}{3}d = 8$.

Ответ: ближайшая точка – в 6 км от первой подстанции, расстояние до поста равно 6 км, $m = 8$ км.

4. Коэффициенты многочлена нечетной степени

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

взятые в том же порядке (начиная со старшей степени), образуют геометрическую прогрессию с отрицательным знаменателем q.

А) Докажите, что $P_n(x)$ не может иметь отрицательных корней.

Б) Определите максимально возможное количество положительных корней $P_n(x)$ и найдите хотя бы один из них.

Решение.

Согласно условию, $a_k = a_{k+1}q = a_n q^{n-k}$. Поэтому многочлен можно записать в виде

$$P_n(x) = a_n\big(x^n + qx^{n-1} + \ldots + q^{n-1}x + q^n\big).$$

Введем новую переменную $t = x/q$. Тогда наш многочлен примет вид

$$P_n(t) = \frac{a_n}{q^n}\big(t^n + t^{n-1} + \ldots + t + 1\big).$$

Рассмотрим многочлен $Q_n(t) = t^n + t^{n-1} + \ldots + t + 1$. Он имеет нечетную степень и все его корни в q раз отличаются от корней P_n.

Способ 1. В силу нечетности n все слагаемые $Q_n(t)$ можно разбить на соседние пары подряд, начиная со старших, и тем самым получить разложение на множители

$$Q_n(t) = t^{n-1}(t+1) + t^{n-3}(t+1) + \ldots + t^2(t+1) + (t+1) = \\ = (t+1)(t^{n-1} + t^{n-3} + \ldots + t^2 + 1).$$

Второй множитель не может быть равен нулю, так как все показатели степеней четные (в силу нечетности n), поэтому $Q_n(t)$ имеет единственный корень $t_0 = -1$.

Способ 2. Видно, что $t = 1$ не является корнем $Q_n(t)$. Воспользуемся формулой суммы геометрической прогресии (при $t \neq 1$). Тогда

$$Q_n(t) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Поскольку $n + 1$ – четное, то числитель зануляется при $t = t_0 = -1$. Других корней (с учетом ограничения) этот многочлен не имеет.

Таким образом, $P_n(x)$ также имеет единственный корень $x_0 = t_0 q = -q$. Поскольку $q < 0$, этот корень положителен.

Ответ: многочлен имеет единственный положительный корень $x_0 = -q$.

5. Книга о вкусной и здоровой пище людоеда (Г. Остер) содержит рецепт изумительного блюда «Сосиска со скромницами». Людоед имеет запас хорошо упитанных скромниц на 4 таких блюда и хочет составить свое меню на неделю так, чтобы перерывы между «Сосисками со скромницами» составляли не более двух дней (в рамках одной недели). Сколькими различными способами он может выбрать 4 дня для лакомства скромницами?

Решение.

Из 7-ми дней недели должно быть 4 дня С (поедание скромниц) и 3 дня О (без скромниц). Общее количество взаимных расположений дней С и О равно $C_7^4 = C_7^3 = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 35$.

Согласно условию, не может быть более двух дней О подряд. Поэтому из общего количества вариантов нужно вычесть количество способов расположить три дня О подряд (все остальные комбинации подходят).

Три О подряд могут стоять между любыми из 4-х С, что дает 3 варианта.

Также три О подряд могут стоять либо в начале недели, либо в ее конце, но в таком случае перерывов между днями С не возникает вовсе (если понимать одну неделю как семь дней с понедельника по воскресенье).

Поэтому искомое количество есть $35 - 3 = 32$.

Ответ: 32.

NB Если же понимать неделю как произвольный отрезок из семи дней подряд, то искомое количество вариантов составит $35 - 5 = 30$.