Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17111 для 11 класса

1. Госпожа Такаято решила сесть на диету и из каждых десяти дней делать четыре голодных и шесть обжорных. Сколькими разными способами она может распределить такие дни, чтобы у нее не было более двух голодных дней подряд (в рамках одной десятидневки)?

Решение.

Необходимо из 10-ти дней выбрать 4, которые будут голодными. Эти дни могут быть расставлены среди остальных шести (обжорных) таким образом, чтобы не было 3-х или 4-х подряд. Подсчитаем количество запретных вариантов.

Для 4-х голодных дней подряд есть 7 вариантов расположения (в самом начале, в самом конце или между любыми из 6-ти обжорных).

В случае 3-х голодных дней подряд снова имеем те же 7 мест, на одно из которых нужно поставить тройку голодных, а на другое – четвертый оставшийся. Количество способов это сделать равно $7 \cdot 6 = 42$.

Общее количество вариантов распределения голодных дней (без учета ограничений) равно $C_{10}^4 = \dfrac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$.

Таким образом, искомое количество есть $210 - 7 - 42 = 161$.

Ответ: 161.

2. На каждой из двух прямолинейных линий электропередач установлены обслуживающие подстанции. На линии А – через каждые m км, на линии В – через каждые q км. Если занумеровать их подряд вдоль каждой линии, то расстояния между подстанциями A_1 и B_1 равно $15\sqrt{2}$ км, между A_3 и B_3 равно $5\sqrt{34}$ км, между A_4 и B_4 равно $15\sqrt{10}$ км. Определите, параллельны ли данные линии? Если да, то найдите расстояние между ними. Если нет, то найдите расстояние от подстанции A_1 до точки их пересечения.

Решение.

Если ввести декартову систему координат с началом координат в точке A_1 и одной из осей, направленной вдоль линии А (можно и иначе), то координаты всех подстанций будут изменяться линейным образом, следовательно квадраты расстояний A_kB_k будут являться значениями некоторого многочлена второй степени $P(s) = as^2 + bs + c$. Найдем его. Будем измерять s в условных единицах длины, так что каждая следующая единица соответствует следующей паре подстанций. Тогда

$$\begin{aligned}
&P(0) = c = 450 = 9 \cdot 50,\\
&P(2) = 4a + 2b + c = 850 = 17 \cdot 50,\\
&P(3) = 9a + 3b + c = 2250 = 45 \cdot 50.
\end{aligned}$$

Для простоты расчетов уменьшим все правые части в 50 раз и из полученной линейной системы найдем

$$a = 8, \qquad b = -12, \qquad c = 9.$$

Следовательно, искомый многочлен имеет вид

$$P(s) = 50(8s^2 - 12s + 9).$$

Его дискриминант отрицателен, $P(s)$ нигде не обращается в ноль (и всюду положителен). Следовательно, линии не пересекаются. Квадрат расстояния между ними равен минимальному значению $P(s)$, которое достигается при $s = s_0 = \frac{3}{4}$ и равно $50 \cdot \frac{9}{2} = 225$.

Ответ: линии параллельны, расстояние между ними равно 15 км.

3. Запись числа A заканчивается цифрой 3. Если же последнюю цифру переставить в начало, то получится число, на 27 больше A. Найдите A, если известно, что оно делится на 99, или докажите, что такого числа не существует.

Решение.

Число A можно представить в виде $A = 10x + 3$, где x – некоторое число, составленное из всех цифр числа A кроме последней. После перестановки последней цифры в начало будет получено новое число B, которое запишется как $B = 3 \cdot 10^n + x$ (где $n \in \mathbb{N}$).

Согласно условию, $B = A + 27$, что дает уравнение

$$3 \cdot 10^n + x = 10x + 3 + 27 = 10x + 30,$$

откуда

$$9x = 3 \cdot 10^n - 30 = 30 \cdot (10^{n-1} - 1).$$

При $n = 1$ полученное уравнение не имеет решений в натуральных числах. Если же $n \geq 2$, то

$$9x = 30 \cdot \overline{\underbrace{9\,9\,\ldots\,9}_{n-1}} \ \Rightarrow \ x = 10 \cdot \overline{\underbrace{3\,3\,\ldots\,3}_{n-1}} \ \Rightarrow \ A = 10x + 3 = \overline{\underbrace{3\,3\,\ldots\,3}_{n-1}0\,3}$$

Полученное число A кратно девяти, если n кратно трем (сумма цифр числа A будет кратна девяти).

Полученное число A кратно одиннадцати, если разность между суммой его цифр на четных местах и суммой его цифр на нечетных местах делится на 11.

При $(n-1)$ – четное: сумма цифр на четных местах $3 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)$, а сумма цифр на нечетных местах $3 \cdot \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)$. Разность между этими суммами равна 3, что не делится на 11.

При $(n-1)$ – нечетное: сумма цифр на четных местах $3 \cdot \left(\frac{n-1}{2} - 1\right)$, а сумма цифр на нечетных местах $3 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)$. Разность между этими суммами равна 6, что не делится на 11.

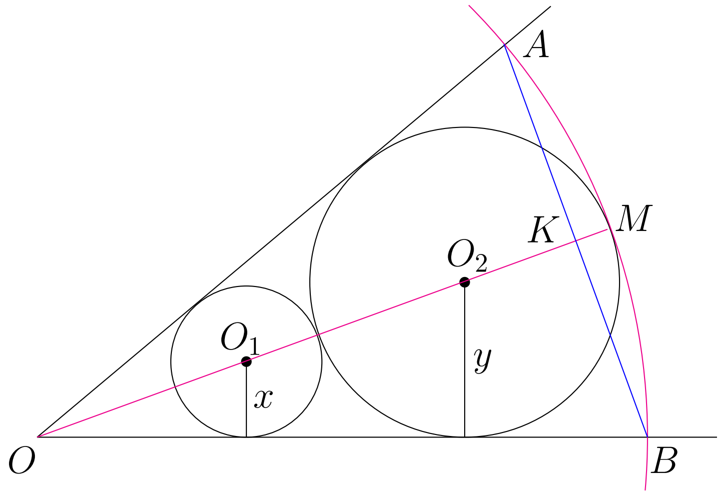
Следовательно, такого числа не существует.

Ответ: не существует.

4. В круговой сектор радиуса R с центральным углом α $(0 < \alpha \le \pi/2)$ вписаны две окружности (обе касаются радиусов-сторон сектора, друг друга внешним образом, а большая касается окружности сектора). Какую наибольшую долю может составлять расстояние между центрами вписанных окружностей от величины R и при каком значении α это достигается?

Решение.

Обозначим радиусы малой и большой вписанных окружностей через x и y, введем величину $\beta = \alpha/2$. Отметим, что $0 < \beta < \pi/4$.



Выразим стороны треугольников через радиусы трех окружностей.

$$OO_2 = R - y, \quad OO_1 = R - x - 2y.$$

Из подобия прямоугольных треугольников получаем

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{R-y}{y} = \frac{R-x-2y}{x}.$$

Откуда

$$\frac{R}{y} = \frac{R-2y}{x} \;\Rightarrow\; x = \frac{R-2y}{R}\cdot y \;\Rightarrow\; \frac{x}{R} = \left(1 - 2\frac{y}{R}\right)\cdot\frac{y}{R}.$$

Расстояние между центрами вписанных окружностей O_1O_2 равно $x + y$. Рассмотрим искомое отношение

$$\frac{x+y}{R} = \left(1 - 2\frac{y}{R}\right)\cdot\frac{y}{R} + \frac{y}{R} = 2\cdot\left(1 - \frac{y}{R}\right)\cdot\frac{y}{R}.$$

Относительно величины $t = \dfrac{y}{R}$ это отношение есть парабола $2t(1-t)$.

Выразим параметр t через угол β.

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{R}{y} - 1 \;\Rightarrow\; t = \frac{y}{R} = \frac{\sin\beta}{1+\sin\beta} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sin\beta}}.$$

Таким образом, при изменении β от 0 до $\pi/4$ параметр t растет от 0 до $\sqrt{2}-1$. Остается найти максимум параболы $2t(1-t)$ на полученном отрезке $[0,\sqrt{2}-1]$. Вершина параболы лежит правее отрезка, следовательно искомый максимум достигается при $t=t_0=\sqrt{2}-1$ и равен $2(3\sqrt{2}-4)$.

Ответ: $2(3\sqrt{2}-4)$ при $\alpha=\pi/2$.

5. Коэффициенты многочлена степени $n > 2024$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

взятые в том же порядке (начиная со старшей степени), образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q $(q \neq 0, \pm 1)$.

Выясните, может ли $P_n(x)$ иметь только один корень.

Если может, укажите минимальную степень (из диапазона выше), при которой это возможно, и выразите корень через a_0 и q. Если нет, укажите минимально возможное количество корней при любом $n > 2024$.

Решение.

Согласно условию, $a_k = a_{k+1}q = a_n q^{n-k}$. Поэтому многочлен можно записать в виде

$$P_n(x) = a_n\big(x^n + qx^{n-1} + \ldots + q^{n-1}x + q^n\big).$$

Введем новую переменную $t = x/q$. Тогда наш многочлен примет вид

$$P_n(t) = \frac{a_n}{q^n}\big(t^n + t^{n-1} + \ldots + t + 1\big).$$

Рассмотрим многочлен $Q_n(t) = t^n + t^{n-1} + \ldots + t + 1$. Все его корни в q раз отличаются от корней P_n, поэтому анализ количества и расположения корней можно провести для $Q_n(t)$.

Если n нечетно, то все слагаемые $Q_n(t)$ можно разбить на соседние пары подряд, начиная со старших, и тем самым получить разложение на множители

$$Q_n(t) = t^{n-1}(t+1) + t^{n-3}(t+1) + \ldots + t^2(t+1) + (t+1) =$$
$$= (t+1)(t^{n-1} + t^{n-3} + \ldots + t^2 + 1).$$

Второй множитель не может быть равен нулю, так как все показатели степеней четные (в силу нечетности n), поэтому $Q_n(t)$ имеет единственный корень $t_0 = -1$.

Таким образом, для любого нечетного n многочлен $P_n(x)$ также имеет единственный корень $x_0 = t_0 q = -q$.

В указанном диапазоне степеней подходящей является наименьшая ($n = 2025$), поэтому рассматривать четные степени нет необходимости.

NB Анализ корней многочлена $Q_n(t)$ можно было провести иначе, воспользовавшись формулой суммы геометрической прогресии (при $t \neq 1$) и переписав его в виде $Q_n(t) = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Ответ: может, $n_{\min} = 2025$, $x_0 = -q$.