ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17991 для 9 класса

1. На прямолинейной линии электропередачи через каждые m км установлены обслуживающие подстанции. Если занумеровать их подряд вдоль линии, то расстояние от центрального поста до первой подстанции равно 3 км, до третьей – 5 км и до четвертой – 9 км. Можно ли на основании этих данных определить, проходит ли линия электропередачи через центральный пост? Если да, то найдите расстояние от него до второй подстанции. Если нет, объясните, почему.

Решение.

Проверим гипотезу о том, что линия проходит через центральный пост.

Для этого введем координатную ось, совпадающую с линией электропередачи. Начало координат выберем в первой подстанции, ось направим в сторонону второй подстанции, а за единичный отрезок примем 1 км.

Если гипотеза верна, то существует точка с координатой c, удаленная от точек с координатами 0, $2m$ и $3m$ $(m > 0)$ на расстояние 3, 5 и 9 соответственно.

Получаем систему из трех уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} |c| &= 3, \\ |c - 2m| &= 5, \\ |c - 3m| &= 9. \end{aligned}$$

Если $c = -3$, то второе уравнение дает единственное положительное решение $m = 1$, которое не удовлетворяет третьему уравнению.

Если же $c = 3$, то второе уравнение имеет единственный положительный корень $m = 4$, который является также корнем третьего уравнения.

Таким образом, система разрешима. Следовательно, гипотеза о прохождении линии через пост верна.

Расстояние от поста до второй подстанции равно $|c - m| = 1$ км.

Ответ: линия электропередачи проходит через центральный пост; искомое расстояние равно 1 км.

2. В книге о вкусной и здоровой пище людоеда (Г. Остер) есть рецепт высококалорийного блюда «Проныры в сыре». У людоеда хранятся четыре куска дырчатого сыра и десять проныр, которые будут распределяться по этим кускам во время приготовления. При этом в каждом куске должен оказаться хотя бы один проныра, а в одном из кусков – не менее двух. Сколькими разными способами все проныры (которых можно считать одинаковыми) могут быть распределены по кускам сыра?

Решение.

Заметим, что в любом случае в одном из кусков окажутся два проныры. Это можно обосновать ссылкой на принцип Дирихле или простым рассуждением от противного (если в каждом менее двух, то всего будет менее четырех).

Поместим в каждый кусок по проныре. Теперь оставшиеся 6 проныр могут быть распределены по кускам произвольным образом. Для подсчета количества вариантов воспользуемся методом шаров и перегородок. У нас есть четыре емкости (куски сыра), следовательно есть три перегородки между ними.

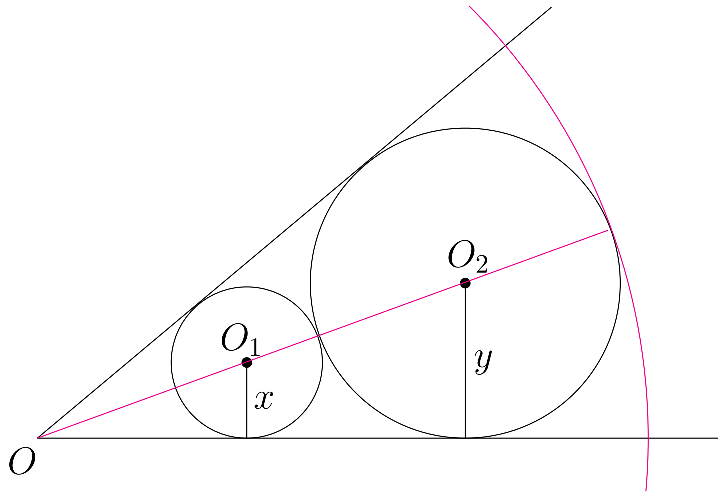
Разложить 6 шаров (проныр) по 4-м емкостям эквивалентно тому, чтобы поставить 3 перегородки между 6-ю шарами. Поскольку перегородки могут стоять в любых местах (даже рядом друг с другом) это эквивалентно тому, чтобы из 9-ти элементов выбрать произвольные 3, которые будут перегородками. Количество способов сделать такой выбор равно $C_9^3 = \dfrac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 84$.

Ответ: 84.

3. В круговой сектор радиуса R вписаны две окружности (обе касаются радиусов-сторон сектора, друг друга внешним образом, а большая касается окружности сектора). Какое наибольшее значение может принимать отношение радиуса меньшей окружности к R?

Решение.

Обозначим радиусы малой и большой вписанных окружностей через x и y (см. рис).



Выразим стороны треугольников через радиусы трех окружностей.

$$OO_2 = R - y, \quad OO_1 = R - x - 2y.$$

Из подобия прямоугольных треугольников получаем

$$\frac{R-y}{y} = \frac{R-x-2y}{x}.$$

Откуда

$$\frac{R}{y} = \frac{R-2y}{x} \Rightarrow x = \frac{R-2y}{R} \cdot y \Rightarrow \frac{x}{R} = \left(1 - 2\frac{y}{R}\right) \cdot \frac{y}{R}.$$

Относительно величины $t = \dfrac{y}{R}$ отношение $\dfrac{x}{R}$ есть парабола $(1-2t)\cdot t$.

Вершина этой параболы (ее максимальное значение) находится в $t = \frac{1}{4}$. Следовательно, $\max \dfrac{x}{R} = \dfrac{1}{8}$.

Ответ: $1/8$.

4. В шестизначном числе A, начинающемся цифрой 1, переставили первую цифру в конец и получили большее число, кратное исходному. Найдите наибольшее возможное значение числа A.

Решение.

Число A можно представить в виде $A = 10^5 + x$, где x – некоторое пятизначное число. После перестановки первой цифры в конец будет получено новое число B, которое запишется как $B = 10x + 1$.

По условию, $B \,\vdots\, A$. Следовательно, существует такое натуральное n, что

$$10x + 1 = n \cdot (10^5 + x),$$

или, выделяя x

$$x \cdot (10 - n) = n \cdot 10^5 - 1,$$

откуда сразу следует, что $n < 10$.

Дальше можно воспользоваться перебором. Предварительно заметим, что слева стоит нечетное число, заканчивающееся цифрой 9. Поэтому множитель $(10 - n)$ может принимать только значения $1, 3, 7, 9$.

При $10 - n = 1 \Rightarrow n = 9$ получаем $x = 899\,999 > 10^4$. Это значение не подходит.

При $10 - n = 3 \Rightarrow n = 7$ получаем $x = 699\,999/3 = 233\,333 > 10^4$, что также не подходит.

При $10 - n = 7 \Rightarrow n = 3$ получаем $x = 299\,999/7 = 42\,857$ (можно разделить в столбик). Это значение подходит.

При $10 - n = 9 \Rightarrow n = 1$ получаем $x = 1111$, следовательно $A = B = 11111$. По условию, число B больше, чем A, значит этот вариант нам тоже не подходит.

Ответ: $A = 142\,857$.

5. В уравнении

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

коэффициент b в 2024 раза больше, чем a ($a \neq 0$); коэффициент c в 2024 раза больше, чем b; а коэффициент d в 2024 раза больше, чем c. Найдите все корни уравнения.

Решение.

Обозначим для краткости $k = 2024$. Тогда уравнение можно сократить на a и записать в виде

$$x^3 + kx^2 + k^2x + k^3 = 0.$$

Далее, сгруппировав слагаемые, получим разложение на множители

$$x^3 + kx^2 + k^2x + k^3 = x^2(x+k) + k^2(x+k) = (x+k)(x^2+k^2).$$

Вторая скобка не может быт равна нулю. Следовательно, уравнение имеет единственный корень $x_0 = -k = -2024$.

Ответ: $x_0 = -2024$.